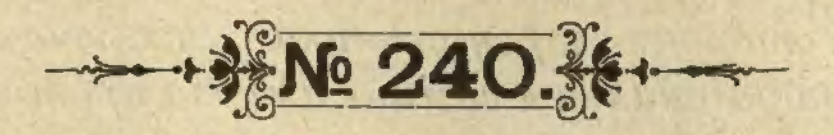
XX Сем. 20-го Іюля 1896 г. № 12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ
ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

(Продолженіе).*

18. Антипараллели Лемуана. Прямыя, антипараллельныя сторонамъ треугольника и проходящія чрезъ его точку Лемуана, я предлагаю называть *антипараллелями Лемуана* для разсматриваемаго треугольника (по аналогіи съ параллелями Лемуана).

Изъ предыдущаго видно, что *антипараллели Лемуана*, какъ діаметры одной окружности (5), равны между собою.

19. Второй шестиугольникъ Лемуана. Шестиугольникъ, вершины котораго суть пересѣченія сторонъ треугольника съ антипараллелями Лемуана, будемъ называть *вторымъ шестиугольникомъ Лемуана.*

Изъ сказаннаго въ § 17 слѣдуетъ, что *противоположныя стороны второго шестиугольника Лемуана равны и параллельны.*

20. Второй кругъ Лемуана. Окружность, проходящая чрезъ точки пересѣченія сторонъ треугольника съ антипараллелями Лемуана, называется *второю окружностью Лемуана.*

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 230, 231, 232, 234 236 и 239.

Изъ сказаннаго въ § 17 слѣдуетъ, что вторая окружность Лемуана принадлежитъ системѣ окружностей Тукера и что *центръ второй окружности Лемуана совпадаетъ съ точкой Лемуана треугольника.*

Если чрезъ R'_ω и R обозначить радіусы второго круга Лемуана и круга, описаннаго около треугольника, то (16):

$$R'_\omega = R.\mathrm{tg}\omega,$$

гдѣ ω есть уголъ Брокара треугольника.

Изъ равнобедренныхъ треугольниковъ $\alpha K\beta'$, $\beta K\gamma'$, $\gamma K\alpha'$ получается:

$$\alpha\beta' = 2.R'_\omega \cos C,\ \ \beta\gamma' = 2.R'_\omega.\cos A,\ \ \gamma\alpha' = 2R'_\omega.\cos B,$$

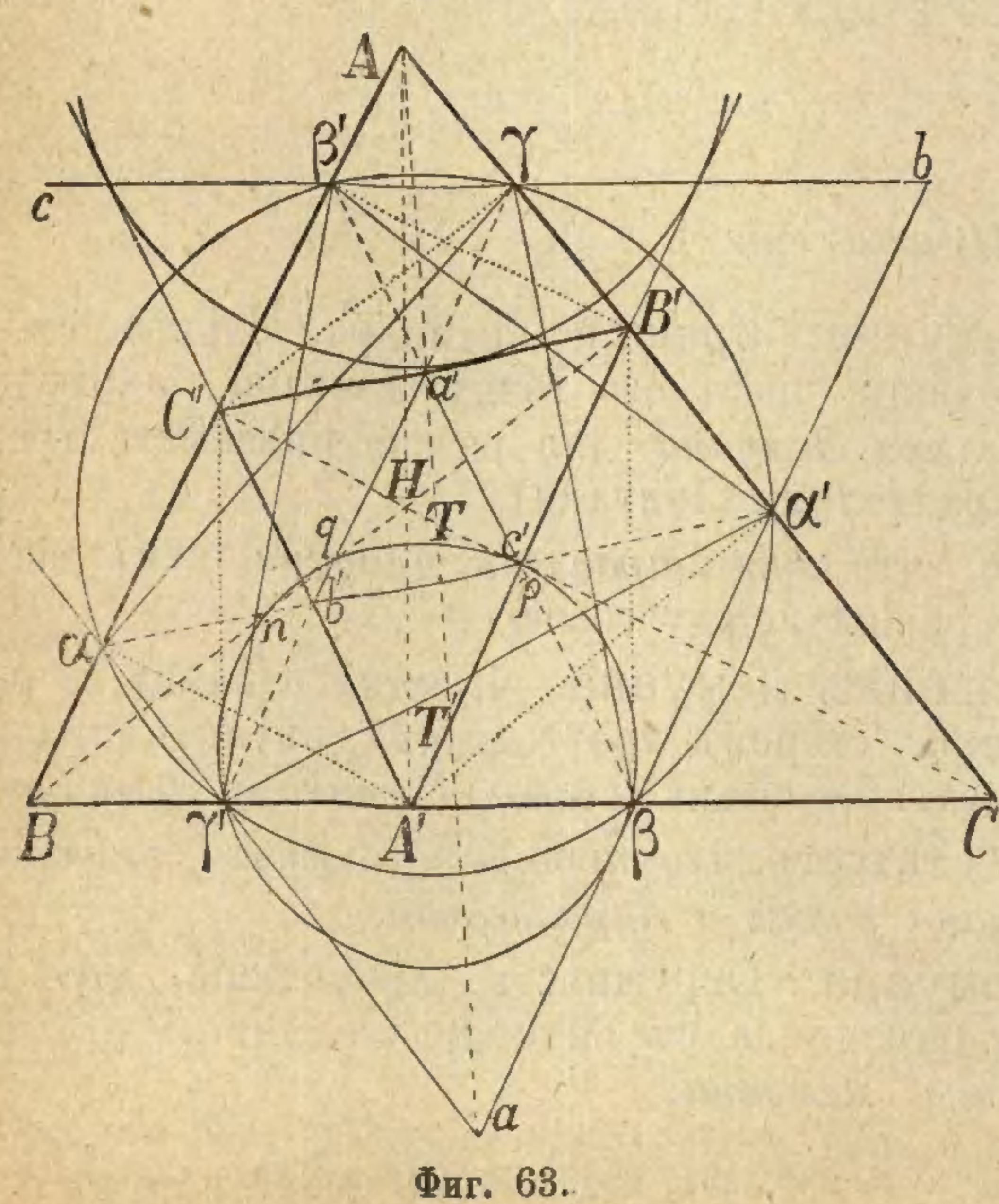
т. е. что *отрѣзки сторонъ треугольника, заключающіеся во второмъ кругѣ Лемуана, пропорціональны cosinus'амъ его противолежащихъ угловъ.*

Вслѣдствіе этого свойства второй кругъ Лемуана называется также *кругомъ cosinus'овъ* (*Cosine Circle*).

21. Теорема. *Проэкціи вершинъ ортоцентрическаго треугольника* A'B'C' *на стороны главнаго треугольника* ABC *лежатъ на одной окружности.*

Пусть A', B', C' суть основанія высотъ треугольника ABC и H— его ортоцентръ (фиг. 63). Обозначимъ

чрезъ α и α' проэкціи A' на AB и AC,
„ β и β' „ B' на BC и BA,
„ γ и γ' „ C' на CA и CB.



Фиг. 63.

Четыреугольники $A\alpha A'\alpha'$ и AC'HB' гомотетичны относительно центра гомотетіи A; поэтому прямая $\alpha\alpha'$ параллельна C'B' и антипараллельна BC. Изъ подобія же треугольниковъ $AC'\gamma$ и $AB'\beta'$ слѣдуетъ, что $AC'.A\beta' = AB'.A\gamma$, т. е. что $\beta'\gamma$ антипараллельна C'B' и $\alpha\alpha'$. (V, 6), слѣдовательно, точки α, α', γ, β' находятся на одной окружности. То же справедливо и для группъ точекъ β, β', α, γ' и γ, γ', β, α'; а потому всѣ шесть точекъ α, α', β, β', γ, γ' лежатъ на одной окружности.

22. Слѣдствія. Прямыя $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ и $\alpha'\beta$ соотвѣтственно параллельны сторонамъ треугольника BC, CA и AB;

поэтому треугольникъ *abc*, составленный этими прямыми, гомотетиченъ съ треугольникомъ ABC. Прямая A*a*, какъ діагональ параллелограмма A*aαα'*, дѣлитъ пополамъ другую діагональ *αα'*, которая антипараллельна BC; поэтому прямая A*a* есть симедіана стороны BC; подобнымъ же образомъ B*b* и C*c* суть симедіаны сторонъ CA и AB, слѣдовательно прямыя A*a*, B*b*, C*c* пересѣкаются въ точкѣ Лемуана K треугольника ABC. Такимъ образомъ, центромъ гомотетіи треугольниковъ ABC и *abc* служитъ общая ихъ точка Лемуана.

Изъ этого вывода слѣдуетъ, что доказанная теорема (21) есть частный случай общей теоремы (1).

23. Обозначимъ чрезъ *a'*, *b'*, *c'* пересѣченія прямыхъ A*a* и B'C', B*b* и C'A', C*c* и A'B'; такъ какъ A*a*, B*b*, C*c* суть симедіаны треугольника ABC, а прямыя B'C', C'A', A'B' антипараллельны сторонамъ этого треугольника, то *a'*, *b'*, *c'* суть средины отрѣзковъ B'C', C'A' и A'B'; поэтому треугольникъ *a'b'c'* гомотетиченъ съ треугольникомъ $A_1B_1C_1$, составленнымъ касательными въ A, B, C къ кругу ABC; центръ гомотетіи этихъ треугольниковъ есть точка Лемуана K треугольника ABC.

Треугольникъ *a'b'c'* составленъ прямыми $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; эти прямыя равны между собою и каждая изъ нихъ равна периметру треугольника *a'b'c'* или полупериметру треугольника A'B'C'.

24. Треугольники $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ равны между собою и подобны треугольнику ABC. Центрами подобія треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ съ треугольникомъ ABC служатъ точки Брокара Ω и Ω' этого треугольника.

Если обозначить чрезъ φ уголъ, составляемый соотвѣтственными сторонами треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и ABC (или $\alpha'\beta'\gamma'$ и ABC), то

$$tg\varphi = -tgA \,.\, tgB \,.\, tgC.$$

25. Окружность Тэйлора (*Taylor*). Окружность, проходящая чрезъ проэкціи α,α', β,β', γ,γ' вершинъ ортоцентрическаго треугольника на стороны треугольника ABC (фиг. 63) наз. *окружностью Тэйлора.*

Изъ предыдущаго (22) слѣдуетъ, что окружность Тэйлора есть частный случай окружностей Тукера и потому центръ окружности Тэйлора находится на прямой, соединяющей точку Лемуана K треугольника съ центромъ O описаннаго около него круга (4).

Если ϱ и R суть радіусы круга Тэйлора и круга, описаннаго около треугольника, то

$$\varrho = R \,.\, \frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin\varphi},$$

гдѣ φ имѣетъ вышеуказанное значеніе (24).

26. Обозначимъ чрезъ T окружность Тэйлора для треугольника ABC и чрезъ T_1, T_2, T_3 окружности Тэйлора для треугольниковъ BHC, CHA, AHB.

Теорема. *Прямыя* ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$), *проходящія чрезъ средины* (*a'* *b'*, *c'*) *сторонъ ортоцентрическаго треугольника* (A'B'C'), *проходятъ чрезъ*

точки пересѣченія сторонъ треугольниковъ BHC, CHA, AHB *съ соотвѣтственными имъ окружностями Тэйлора* T_1, T_2, T_3. (фиг. 63).

Легко видѣть, что окружности, описанныя около треугольниковъ AC′C, AB′B, BC′H и CB′H, проходятъ чрезъ точку A′ и что прямая aa' служитъ *прямой Симсона* (I, 7) точки A′ для этихъ треугольниковъ. Поэтому, если m и n суть пересѣченія aa' съ CH и BH, то $A'm \perp CH$ и $A'n \perp BH$.

Точно также, если p и q суть пересѣченія $\beta\beta'$ съ CH и $\gamma\gamma'$ съ BH, то $B'p \perp CH$ и $C'q \perp BH$. Такимъ образомъ точки m, n, p, q, какъ и β, γ', суть проэкціи вершинъ треугольника A′B′C′ на стороны треугольника BHC; но A′B′C′ есть треугольникъ ортоцентрическій для BHC; слѣдовательно, точки m, n, p, q, β, γ' находятся на окружности Тэйлора T_1. (21).

27. Теорема. *Центры окружностей Тэйлора* T, T_1, T_2, T_3 *совпадаютъ съ центрами круговъ вписаннаго и внѣвписанныхъ въ треугольникъ* ($a'b'c'$), *вершины котораго суть средины сторонъ ортоцентрическаго треугольника* (A′B′C′).

Такъ какъ треугольникъ $\beta a'\gamma'$ — равнобедренный, то внутренній биссекторъ его угла a' перпендикуляренъ къ $\beta\gamma'$, и дѣлитъ эту сторону пополамъ, т. е. проходитъ чрезъ центръ круга T. Подобнымъ же образомъ биссекторы угловъ b' и c' треугольника $a'b'c'$ проходятъ чрезъ центръ круга T; слѣдовательно, центръ этого круга совпадаетъ съ центромъ круга, вписаннаго въ треугольникъ $a'b'c'$.

Замѣтивъ затѣмъ, что $\angle A'C'B' = 180^0 - 2C$ и что $\angle b'c'\beta = 180^0 - \angle a'c'b' = 180^0 - \angle A'C'B' = 2C$, заключаемъ, что $^1/_2 \angle b'c'\beta = \angle C = \angle C'a'a$; слѣдовательно, биссекторъ угла $b'c'\beta$ параллеленъ $C'a$ и перпендикуляренъ CC′ или mp; поэтому треугольникъ $mc'p$ равнобедренный и биссекторъ угла $b'c'\beta$ проходитъ чрезъ средину mp, а слѣдовательно, и чрезъ центръ круга T_1; отсюда, на основаніи предыдущаго, выводится, что центръ круга T_1 совпадаетъ съ центромъ круга, внѣвписаннаго въ треугольникъ $a'b'c'$.

28. Теорема. *Радикальныя оси круговъ* T_1, T_2, T_3 *суть высоты треугольника* ABC; *радикальныя оси каждаго изъ этихъ круговъ съ кругомъ* T *суть стороны этого треугольника.*

Ибо окружности T_1 и T_2 пересѣкаются въ точкахъ m и p высоты треугольника CC′, а окружности T и T_1 пересѣкаются на сторонѣ треугольника BC въ β и γ' (26).

Слѣдствіе. Такъ какъ ортоцентръ H и вершины треугольника ABC суть центры круговъ вписаннаго и внѣвписанныхъ въ ортоцентрическій треугольникъ A′B′C′, который гомотетиченъ съ треугольникомъ $a'b'c'$, то T, T_1, T_2, T_3 и H, A, B, C суть соотвѣтственныя точки гомотетичныхъ фигуръ $a'b'c'$ и A′B′C′.

29. Теорема. *Окружность Тэйлора* T *пересѣкается ортогонально съ окружностями, внѣвписанными въ ортоцентрическій треугольникъ* A′B′C′ *треугольника* ABC.

Обозначимъ чрезъ ϱ_1 радіусъ круга, внѣвписаннаго въ треугольникъ A'B'C' и касающагося стороны его B'C'; это есть перпендикуляръ изъ A на B'C'. Такъ какъ треугольники ABC и AB'C' подобны, то

$$\frac{\varrho_1^2}{AA'^2} = \frac{AC'^2}{AC^2},$$

но $AA'^2 = AC \,.\, A\alpha'$ и $AC'^2 = AC \,.\, A\gamma$; поэтому $\varrho_1^2 = A\alpha' \,.\, A\gamma$ = квадрату касательной изъ A къ кругу T; слѣдовательно, окружность, описанная около точки A радіусамъ ϱ_1, ортогональна съ окружностью T. (IV,11).

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что *каждая изъ окружностей Тэйлора* T_1, T_2, T_3 *пересѣкается ортогонально съ окружностью, вписанною въ ортоцентрическій треугольникъ* A'B'C' *и двумя окружностями, внѣвписанными въ него.*

30. Обозначимъ чрезъ r', r'_1, r'_2 r'_3 радіусы круговъ вписаннаго и внѣвписанныхъ въ треугольникъ $a'b'c'$ (фиг. 63); чрезъ 2π—периметръ этого треугольника и чрезъ ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3—радіусы круговъ Тэйлора T, T_1, T_2, T_3.

Такъ какъ круги радіусовъ ϱ и r' концентричны (27), то

$$\varrho^2 = r'^2 + \frac{\alpha\alpha'^2}{4};$$

но $\alpha\alpha' = 2\pi$ (23), гдѣ π есть полупериметръ треугольника $a'b'c'$; слѣдовательно

$$\varrho^2 = r'^2 + \pi^2.$$

Точно такъ же

$$\varrho_1^2 = r'^2_1 + \frac{\beta p^2}{4};$$

но $\beta p = \beta\beta' - \beta' p = 2(\pi - a')$, ибо $\beta\beta' = 2\pi$, а $\beta' p = B'C' = 2a'$;

слѣдовательно,

$$\varrho_1^2 = r_1'^2 + (\pi - a')^2.$$

Отсюда по аналогіи

$$\varrho_2^2 = r_2'^2 + (\pi - b')^2,$$

$$\varrho_3^2 = r_3'^2 + (\pi - c')^2.$$

31. Если обозначить чрезъ R радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, то

$$\varrho^2 = 4R^2(\sin^2A \,.\, \sin^2B \,.\, \sin^2C + \cos^2A \,.\, \cos^2B \,.\, \cos^2C),$$

$$\varrho_1^2 = 4R^2(\cos^2A \,.\, \sin^2B \,.\, \sin^2C + \sin^2A \,.\, \cos^2B \,.\, \cos^2C),$$

$$\varrho_2^2 = 4R^2(\sin^2A \,.\, \cos^2B \,.\, \sin^2C + \cos^2A \,.\, \sin^2B \,.\, \cos^2C),$$

$$\varrho_3^2 = 4R^2(\sin^2A \,.\, \sin^2B \,.\, \cos^2C + \cos^2A \,.\, \cos^2B \,.\, \sin^2C);$$

сложивъ эти равенства, получимъ:

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 = 4R^2;$$

слѣдовательно, *сумма квадратовъ радіусовъ окружностей Тэйлора* T, T_1, T_2, T_3 *равна квадрату діаметра круга, описаннаго около треугольника* ABC.

Приложенія. 32. Если въ окружность вписанъ шестиугольникъ, противоположныя стороны котораго параллельны, то треугольникъ, составленный тремя сторонами его черезъ одну, и треугольникъ, составленный остальными тремя его сторонами, имѣютъ общія симедіаны.

33. Если два треугольника имѣютъ общія симедіаны, то стороны одного изъ нихъ пропорціональны медіанамъ другого.

34. Треугольники съ общими симедіанами имѣютъ общія точки Брокара.

35. Ортоцентръ треугольника ABC, его точка Лемуана и точка Лемуана треугольника, ортоцентрическаго для ABC, находятся на одной прямой (*Van-Aubel*).

36. Поляра точки Лемуана треугольника относительно его круга Лемуана есть радикальная ось этого круга и круга описаннаго около треугольника.

37. Если R и R' суть радіусы круговъ описаннаго около треугольника и второго круга Лемуана, то квадратъ діаметра перваго круга Лемуана равенъ $R^2 + R'^2$.

38. Если центръ круга Тукера дѣлитъ разстояніе OK между центромъ круга, описаннаго около треугольника, и его точкой Лемуана въ отношеніи $m:n$, то радіусъ круга Тукера равенъ

$$\frac{\sqrt{m^2R'^2 + n^2R^2}}{m+n},$$

гдѣ R и R' суть радіусы круговъ описаннаго около треугольника а второго круга Лемуана.

39. Центръ круга, описаннаго около треугольника ABC, и ортоцентръ его ортоцентрическаго треугольника A'B'C' симметричны относительно центра круга Тэйлора T. (*Tucker*).

40. Окружность, имѣющая діаметромъ разстояніе между центрами гомотетіи двухъ окружностей, наз. *окружностью гомотетіи* этихъ окружностей.

Окружности гомотетіи круга, описаннаго около треугольника, и каждаго изъ круговъ Тэйлора имѣютъ общую радикальную ось.

41. Если треугольники ABC и A'B'C' имѣютъ общія симедіаны, то

$$\cot A + \cot A' = \cot B + \cot B' = \cot C + \cot C' = {}^2/_3 \cot \omega. \quad (Tucker).$$

Д. Е.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника").

*(Продолженіе *).*

III. Относительное положеніе эллипса и прямой.

7. Теорема. Прямая и эллипсъ не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.

Пусть нѣкоторая прямая AB имѣетъ двѣ общихъ съ эллипсомъ точки A и B. Здѣсь можетъ быть два случая: прямая AB либо проходитъ черезъ одинъ изъ фокусовъ, либо не проходитъ.

Если прямая AB проходитъ черезъ одинъ изъ фокусовъ, напримѣръ, черезъ фокусъ F, то она имѣетъ двѣ и только двѣ общихъ съ эллипсомъ точки. Дѣйствительно, на каждомъ изъ лучей FA и FB лежитъ одна и только одна (гл. 2) точка эллипса, а именно, по предположенію, на первомъ лучѣ лежитъ точка A, а на второмъ—точка B. Но эти два луча составляютъ въ совокупности цѣлую прямую AB, а потому оказывается, что прямая AB встрѣчаетъ эллипсъ лишь въ двухъ точкахъ A и B, чѣмъ и доказывается теорема для того случая, когда прямая проходитъ черезъ одинъ изъ фокусовъ.

Пусть теперь прямая AB не проходитъ ни черезъ одинъ изъ фокусовъ. При этомъ могутъ быть два случая: 1) фокусы лежатъ по разныя стороны прямой AB; 2) оба фокуса лежатъ по одну сторону прямой AB.

Въ первомъ случаѣ точки A и B непремѣнно лежатъ по разныя стороны прямой F′F, ибо, если бы онѣ лежали по одну сторону прямой F′F, то одна изъ ломанныхъ AF + AF′ и BF + BF′ оказалась бы объемлющей, а другая объемлемой, и потому мы имѣли бы

$$AF + AF' \gtrless BF + BF',$$

что невозможно, ибо A и B суть точки эллипса, а потому

$$AF + AF' = BF + BF' = 2a. \qquad (5)$$

Итакъ точки A и B лежатъ по разныя стороны прямой F′F. Поэтому всякая точка X прямой AB, лежащая внутри отрѣзка AB, окажется внутри одного изъ треугольниковъ AFF′ или BFF′, а потому, принявъ во вниманіе, что объемлющая больше объемлемой, мы будемъ имѣть либо

$$XF + XF' < AF + AF', \text{ либо } XF + XF' < BF + BF',$$

---

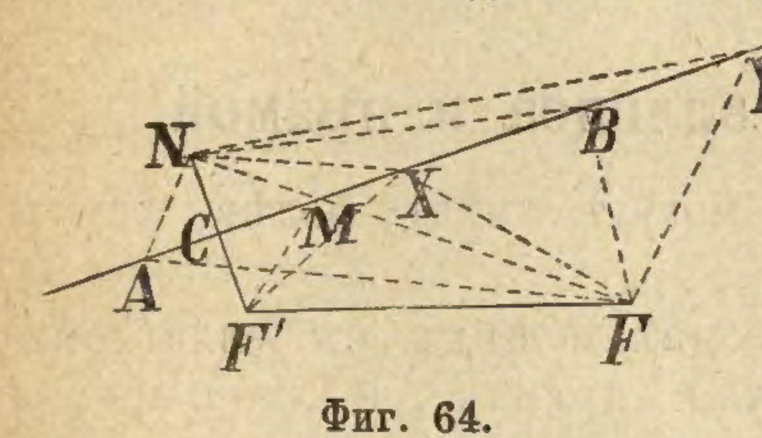
*) См. „Вѣстника Оп. Физики" № 239.

т. е., вслѣдствіе уравненія (5),

$$XF + XF' < 2a,$$

а потому точка X не есть точка эллипса. Подобнымъ же образомъ для всякой точки Y, лежащей на продолженіи отрѣзка AB въ ту или другую сторону, выведемъ неравенство $YF + YF' > 2a$, ибо одинъ изъ треугольниковъ AFF′ и BFF′ окажется внутри треугольника YFF′.

Итакъ ни одна изъ точекъ прямой AB, кромѣ точекъ A и B, не принадлежитъ эллипсу въ случаѣ, когда фокусы лежатъ по обѣ стороны этой прямой. Пусть теперь фокусы F и F′ лежатъ по одну сторону прямой AB. Для доказательства теоремы въ этомъ случаѣ поступимъ такъ: изъ одного изъ фокусовъ F′ опустимъ (черт. 64) перпендикуляръ F′C на прямую AB и отложимъ на его продолженіи CN = F′C. Тогда разстояніе каждой точки прямой AB отъ фокуса F′ можно замѣнить разстояніемъ ея отъ точки N, какъ наклонной, равно удаленной отъ основанія перпендикуляра. Поэтому



Фиг. 64.

$$BF + BN = AF + AN = 2a.$$

Примѣняя къ треугольникамъ ANF и BNF и къ прямой AB тѣ самыя разсужденія, которыми мы пользовались по отношенію къ треугольникамъ AFF′ и BFF′ и къ прямой AB въ случаѣ, когда фокусы находятся по обѣ стороны прямой AB, мы найдемъ, что точки A и B лежатъ по разныя стороны прямой FN, а затѣмъ докажемъ, что для всякой точки X, лежащей внутри отрѣзка AB, справедливо неравенство

$$XF + XN < 2a.$$

Но

$$XN = XF',$$

а потому для всякой точки отрѣзка AB найдемъ

$$XF + XF' < 2a.$$

Подобнымъ же образомъ для всякой точки Y, лежащей на продолженіи отрѣзка AB, получимъ

$$YF + YF' > 2a.$$

Итакъ, каково бы ни было положеніе прямой AB относительно эллипса, она, имѣя двѣ общихъ точки съ эллипсомъ, не имѣетъ болѣе ни одной общей съ нимъ точки, что и требовалось доказать.

8. Наибольшее число точекъ, въ которыхъ прямая можетъ встрѣчать данную кривую, называется порядкомъ кривой.

Такъ какъ, соединяя двѣ произвольно выбранныя точки эллипса прямою, можно построить безчисленное количество прямыхъ, имѣющихъ двѣ общихъ съ эллипсомъ точки, и такъ какъ, по предыдущей теоремѣ, болѣе двухъ общихъ точекъ прямая и эллипсъ имѣть не могутъ, то эллипсъ есть кривая второго порядка.

9. Отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ точки эллипса, называется *хордой* эллипса.

Теорема. Всѣ точки хорды, кромѣ ея концовъ, лежатъ внутри эллипса. Всѣ же точки, лежащія на продолженіи хорды, находятся внѣ эллипса.

Въ случаѣ, когда хорда проходитъ черезъ одинъ изъ фокусовъ, теорема непосредственно вытекаетъ изъ понятія о внѣшней и внутренней относительно эллипса точкѣ (гл. 5).

Если же хорда не проходитъ ни черезъ одинъ изъ фокусовъ, то она составляетъ часть прямой, имѣющей съ эллипсомъ двѣ общія точки, а именно—конечныя точки хорды. Назовемъ эти двѣ точки черезъ A и B.

По теоремѣ 7 для всякой точки X, лежащей внутри отрѣзка AB, т. е. для всякой точки хорды, не совпадающей съ однимъ изъ ея концовъ, справедливо неравенство

$$XF + XF' < 2a,$$

а потому (см. обратная теорема 6) точка X лежитъ внутри эллипса.

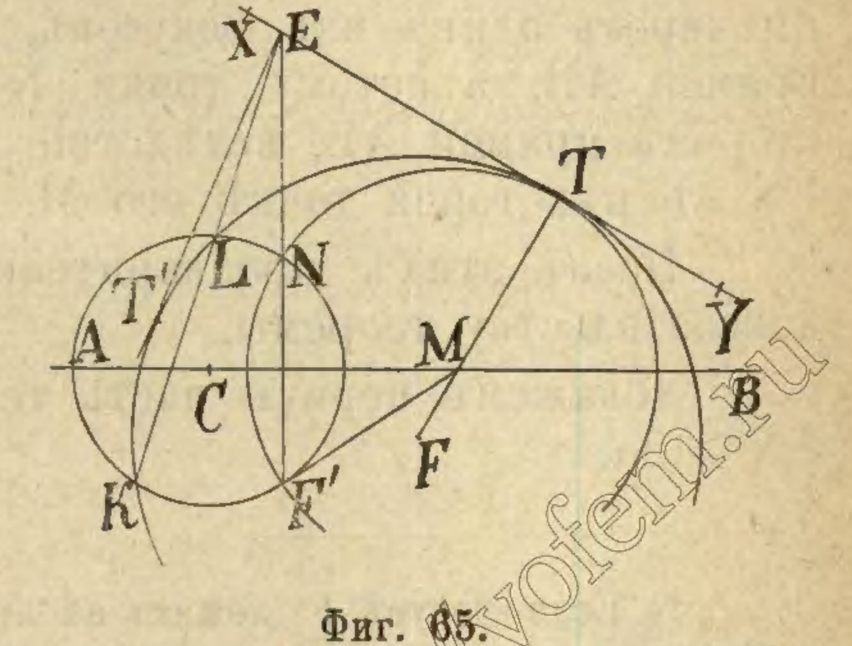
Подобнымъ же образомъ изъ той же теоремы 7 вытекаетъ, что всякая точка Y, лежащая на продолженіи хорды, находится внѣ эллипса.

10. **Лемма.** Если на лучахъ ET и EK, сходящихся въ точкѣ E, взяты точки K, L и T (черт. 65) такъ, что

$$EK \cdot EL = ET^2, \qquad (6).$$

то окружность, проходящая черезъ точки E, K и L, касается прямой ET въ точкѣ T.

Пусть окружность, проходящая черезъ точки K, L и T, не касается прямой ET въ точкѣ T, но пересѣкаетъ ее еще въ одной точкѣ. Точка эта не можетъ совпасть съ точкой E, такъ какъ тогда прямая KL встрѣчала бы окружность въ трехъ точкахъ K, L и E, что невозможно; точка эта не можетъ лежать и влѣво отъ точки E, совпадая, напримѣръ, съ точкой X чертежа, такъ какъ тогда точка E лежала бы сразу на хордѣ XT и на продолженіи хорды KL, т. е. была-бы одновременно и внутри, и внѣ окружности. Остается допустить, что другая точка встрѣчи прямой ET съ окружностью



Фиг. 65.

лежитъ вправо отъ точки E, совпадая, напримѣръ, съ точкою Y чертежа. Но тогда мы имѣемъ по свойству круга

$$EK \cdot EL = EY \cdot ET,$$

откуда въ связи съ уравненіемъ (6) слѣдуетъ, что прямыя ET и EY равны; но это невозможно, такъ какъ одна изъ этихъ прямыхъ есть часть другой.

Итакъ, предположенiе, что окружность, проходящая черезъ точки K, L, T и прямая ET имѣютъ еще одну общую точку, кромѣ T, невозможно; слѣдовательно прямая ET имѣетъ лишь одну точку T, общую съ окружностью, т. е. касается окружности въ точкѣ T.

11. **Теорема.** Представимъ себѣ эллипсъ и нѣкоторую прямую AB. Изъ одного изъ фокусовъ F' опустимъ на нее перпендикуляръ $F'C$ (черт. 64) и на продолженiи его отложимъ $CN = F'C$. Затѣмъ соединимъ точку N съ другимъ фокусомъ F прямою FN. Если длина отрѣзка FN больше $2a$, то прямая AB вовсе не встрѣчаетъ эллипса; если отрѣзокъ FN равенъ $2a$, то прямая AB встрѣчаетъ эллипсъ лишь въ одной точкѣ; наконецъ, если отрѣзокъ FN меньше, чѣмъ $2a$, то прямая AB встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ *).

Замѣтимъ прежде всего, что въ первомъ и во второмъ случаяхъ, т. е. когда отрѣзокъ FN больше или равенъ $2a$, прямая AB не проходитъ ни черезъ одинъ изъ фокусовъ. Дѣйствительно, выполнивъ указанное въ теоремѣ построенiе для случая, когда прямая AB проходитъ черезъ одинъ изъ фокусовъ, мы найдемъ, что отрѣзокъ FN въ этомъ случаѣ равенъ $2c$; слѣдовательно черезъ одинъ изъ фокусовъ прямая AB можетъ проходить лишь въ томъ случаѣ, когда отрѣзокъ FN меньше, чѣмъ $2a$.

Точно такъ же въ первомъ и во второмъ случаѣ теоремы оба фокуса лежатъ по одну сторону прямой AB. Дѣйствительно, если бы фокусы лежали по обѣ стороны прямой AB, то прямая эта встрѣчала бы отрѣзокъ FF'; поэтому сторона FF' треугольника NFF' оказалась бы больше стороны FN, ибо сторону FF' встрѣчалъ бы перпендикуляръ AB, возставленный изъ средины третьей стороны $F'N$ **). Значитъ въ предположенiи, что фокусы лежатъ по обѣ стороны прямой AB, кроется допущенiе, что отрѣзокъ FN меньше $2c$, а потому и подавно менѣе чѣмъ $2a$, а не равенъ и не больше $2a$.

Итакъ въ первомъ и во второмъ случаѣ прямая AB не проходитъ ни черезъ одинъ изъ фокусовъ, и оба фокуса лежатъ по одну сторону прямой AB, а потому точки N и F окажутся съ разныхъ (черт. 64) сторонъ прямой AB, вслѣдствiе чего прямая AB встрѣчаетъ отрѣзокъ FN въ нѣкоторой точкѣ его M.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчанiй обратимся къ самому доказательству теоремы.

Докажемъ первую часть теоремы, относящуюся къ случаю, когда $FN > 2a$.

---

*) Если фокусъ F' лежитъ на прямой AB, то условимся и въ этомъ случаѣ выполнять построенiе, принимая длины перпендикуляровъ CN и $F'C$ за нули, т. е. будемъ считать точки N и C совпадающими съ точкою F'.

**) Здѣсь мы пользуемся теоремой: изъ двухъ равноудаленныхъ отъ основанiя перпендикуляра наклонныхъ, исходящихъ изъ точки, не лежащей на перпендикулярѣ, больше та, которая встрѣчаетъ перпендикуляръ; мы лишь предлагаемъ иначе формулировать теорему, а именно: изъ двухъ сторонъ AB и BC треугольника ABC больше та, которую встрѣчаетъ перпендикуляръ къ срединѣ стороны AC. Такая формулировка точнѣе, ибо меньшая изъ линiй AB и BC можетъ быть и не наклонной, а тоже перпендикуляромъ.

Прямыя MF′ и MN равны (черт. 64), такъ какъ, по построенію, прямая AB есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ точекъ F′ и N. Поэтому имѣемъ:

$$MF + MF' = MF + MN = FN.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сумма $MF + MF'$ болѣе чѣмъ $2a$, ибо FN, по предположенію, больше $2a$. Значитъ точка M не принадлежитъ эллипсу; для всякой же другой точки X прямой AB имѣемъ, что

$$XF + XF' = XF + XN;$$

но

$$XF + XN > FN > 2a,$$

а потому и

$$XF + XF' > 2a.$$

Итакъ сумма разстояній отъ фокусовъ всѣхъ точекъ прямой AB больше $2a$. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки прямой AB лежатъ внѣ эллипса, т. е. прямая эта вовсе не встрѣчаетъ эллипса.

Перейдемъ ко второй части теоремы. Такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ равенства

$$MF + MF' = MF + MN = 2a,$$

то точка M лежитъ на эллипсѣ; всѣ же остальныя точки прямой AB лежатъ внѣ эллипса, что легко доказать тѣмъ же способомъ, какъ и въ первомъ случаѣ.

Докажемъ затѣмъ третью часть теоремы.

Разсмотримъ сперва случай, когда прямая AB проходитъ черезъ одинъ изъ фокусовъ F. Случай этотъ относится именно къ третьей части теоремы, такъ какъ отрѣзокъ FN для прямой, проходящей черезъ фокусъ, равенъ, какъ выше было замѣчено, длинѣ фокуснаго разстоянія $2c$. Такъ какъ прямая, проходящая черезъ фокусъ, состоитъ изъ двухъ исходящихъ изъ фокуса лучей, каждый изъ которыхъ встрѣчаетъ эллипсъ (гл. 2) въ одной точкѣ, то прямая эта дѣйствительно встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ; итакъ, теорема справедлива для того случая, когда прямая AB проходитъ черезъ фокусъ.

Пусть теперь прямая AB не проходитъ ни черезъ одинъ изъ фокусовъ. Въ такомъ случаѣ опишемъ изъ фокуса F, какъ изъ центра, окружность радіусомъ, равнымъ $2a$. Затѣмъ (черт. 65) изъ какой-нибудь точки C прямой AB опишемъ, какъ изъ центра, радіусомъ CF′ окружность, которая пройдетъ и черезъ точку N, ибо прямыя CF′ и CN равны, какъ наклонныя, равно удаленныя отъ основанія перпендикуляра; при этомъ точку C выберемъ такъ, чтобы окружность C*) встрѣтила окружность F въ двухъ точкахъ; для этого, напримѣръ, достаточно взять точку C внѣ окружности F. Назовемъ черезъ K и L точки встрѣчи окружностей C и F. Продолжимъ хорду KL до встрѣчи ея съ прямой F′N. Эти двѣ прямыя непремѣнно пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ E, такъ какъ онѣ перпендикулярны соотвѣтственно къ пересѣкающимся

*) Условимся обозначать окружности и круги буквою центра.

прямымъ CF и AB. Окружность C дѣлится хордою KL на двѣ дуги: одну, всѣ точки которой лежатъ внутри круга F, и другую, дополнительную къ первой дугѣ до 360^0, всѣ точки которой лежатъ внѣ этого круга. Такъ какъ отрѣзокъ NF, по предположенію, меньше $2a$ и фокусное разстояніе FF' также меньше $2a$, то обѣ точки N и F лежатъ внутри круга F. Такимъ образомъ обѣ эти точки принадлежатъ одной и той же изъ двухъ вышеуказанныхъ дугъ окружности C и поэтому обѣ лежатъ по одну сторону прямой KL; отсюда слѣдуетъ, что точка E встрѣчи прямыхъ KL и $F'N$ лежитъ на продолженіи хорды KL, т. е. внѣ круга F. Изъ точки E проведемъ касательныя къ окружности F; пусть T и T'—точки прикосновенія къ окружности этихъ касательныхъ. Соединяя точки T и T' съ фокусомъ F, получимъ въ пересѣченіи прямой AB съ прямыми TF и $F'F$ двѣ точки эллипса. Дѣйствительно, вообразимъ себѣ окружность, проходящую черезъ точки F', N и T, и назовемъ центръ ея черезъ M. Изъ окружностей C и F мы имѣемъ:

$$EK \,.\, EL = EF' \,.\, EN = ET^2,$$

откуда слѣдуетъ, по леммѣ 10, что окружность M касается прямой ET въ точкѣ ея T; но окружность F также касается прямой ET въ точкѣ ея T; слѣдовательно окружности M и F касаются одна другой въ точкѣ T. Отсюда вытекаетъ, что центръ окружности M лежитъ на прямой TF; съ другой стороны, центръ ея лежитъ на прямой AB, перпендикулярной, по построенію, къ хордѣ $F'N$ и проходитъ черезъ ея середину. Значитъ точка M лежитъ на пересѣченіи прямыхъ AB и FT; при этомъ точка M лежитъ непремѣнно между точками F и T, ибо точка F' круга M лежитъ внутри круга F, а потому радіусъ MT круга M меньше радіуса FT круга F.

Поэтому мы находимъ

$$MF + MT = FT = 2a.$$

Съ другой стороны прямыя MF' и MT равны, какъ радіусы одного круга, а значитъ

$$MF + MF' = 2a,$$

т. е. точка M принадлежитъ эллипсу. Точно также докажемъ, что на пересѣченіи прямыхъ AB и FT' лежитъ другая точка эллипса. Кромѣ этихъ двухъ точекъ прямой AB ни одна точка ея не принадлежитъ эллипсу, такъ какъ, по теоремѣ 7, прямая и эллипсъ не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.

Обратная теорема. Представимъ себѣ эллипсъ и нѣкоторую прямую AB. Изъ одного изъ фокусовъ F' опустимъ перпендикуляръ $F'C$ (черт. 64) и на продолженіи его отложимъ $CN = F'C$. Затѣмъ проведемъ прямую FN.

Если прямая AB вовсе не встрѣчаетъ эллипса, то отрѣзокъ FN больше $2a$.

Если прямая AB имѣетъ съ эллипсомъ лишь одну общую точку, то $FN = 2a$; наконецъ, если прямая AB встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ, то $FN < 2a$.

Теорема эта доказывается на основанiи прямой способомъ отъ противнаго.

12. **Теорема.** Всякая прямая, проходящая черезъ точку, лежащую внутри эллипса, встрѣчаетъ его въ двухъ точкахъ.

Пусть X — точка (черт. 64), лежащая внутри эллипса.

Всѣ прямыя, проходящiя черезъ нее, можно подраздѣлить на слѣдующiя группы:

1) Двѣ прямыя XF и XF′, проходящiя черезъ фокусы, каждая изъ которыхъ (теор. 11, третья часть) встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ; слѣдовательно, теорема справедлива по отношенiю къ этимъ двумъ прямымъ.

2) Группа прямыхъ, встрѣчающихъ отрѣзокъ FF′; для такихъ прямыхъ, какъ указано это въ гл. 11, отрѣзокъ FN окажется меньше $2a$, а потому каждая изъ этихъ прямыхъ встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ.

3) Группа прямыхъ, не встрѣчающихъ отрѣзка FF′. Пусть AB (черт. 64)—одна изъ такихъ прямыхъ. Построимъ отрѣзокъ FN, какъ указано это въ теоремѣ 11; такъ какъ въ этомъ случаѣ оба фокуса лежатъ по одну сторону прямой AB, то точки F и N лежатъ съ разныхъ ея сторонъ, а потому прямая AB встрѣчаетъ отрѣзокъ FN въ нѣкоторой точкѣ M. Если точки X и M совпадаютъ, то $FN = XF + XF'$, если же онѣ не совпадаютъ, то $FN < XF + XF'$. Итакъ вообще

$$FN \leqslant XF + XF'.$$

Но $XF + XF' < 2a$, такъ какъ точка X (гл. 6), по предположенiю, лежитъ внутри эллипса, а потому $FN < 2a$.

Отсюда слѣдуетъ, по теоремѣ 11, что прямая AB встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ.

Слѣдствiе 1-е. Всякiй лучъ, исходящiй изъ точки, лежащей внутри эллипса, встрѣчаетъ его въ одной точкѣ.

Пусть A и B — двѣ точки эллипса, лежащiя на нѣкоторой прямой, состоящей изъ двухъ прямо противоположныхъ лучей, исходящихъ изъ точки X, лежащей внутри эллипса. Двѣ точки A и B могутъ лежать вообще либо обѣ на одномъ изъ этихъ лучей, либо по одной точкѣ на каждомъ изъ нихъ; но при первомъ предположенiи точка X лежала бы на продолженiи хорды AB и находилась бы поэтому, по теоремѣ 9-й, внѣ эллипса, что противно предположенiю. Итакъ точки эллипса располагаются по одной на каждомъ лучѣ, проходящемъ черезъ точку X, лежащую внутри эллипса.

Слѣдствiе 2-е. Всѣ точки отрѣзка, соединяющаго двѣ точки, лежащiя внутри эллипса, тоже лежатъ внутри эллипса.

Пусть x и y — двѣ точки, лежащiя внутри эллипса.

Лучъ xA, представляющiй собою продолженiе отрѣзка yx, встрѣтитъ эллипсъ, согласно съ предыдущимъ слѣдствiемъ, въ нѣкоторой точкѣ A.

Точно также лучъ yB, представляющiй продолженiе отрѣзка xy, встрѣтитъ эллипсъ въ нѣкоторой точкѣ B. Такимъ образомъ точки x и y

окажутся точками хорды AB, а потому, по теоремѣ 9, всѣ промежуточныя точки отрѣза xy лежатъ внутри эллипса.

Слѣдствіе 3-е. Отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки J и E, изъ которыхъ первая лежитъ внутри эллипса, а другая — внѣ его, встрѣчаетъ эллипсъ.

Дѣйствительно, лучъ JE, какъ проходящій черезъ точку, лежащую внутри эллипса, встрѣчаетъ эллипсъ въ нѣкоторой точкѣ A. Допустимъ, что точка A лежитъ на продолженіи отрѣзка JE; тогда, принявъ во вниманіе, что лучъ, прямо противоположный лучу JE встрѣтитъ эллипсъ въ нѣкоторой точкѣ B, мы можемъ разсматривать точку E, какъ точку хорды AB; но въ такомъ случаѣ точка E оказалась бы внутри эллипса, что противно предложенію.

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Третій спектръ аргона. — Вскорѣ послѣ открытія аргона B. Круксъ занялся подробнымъ изученіемъ его спектра и обнаружилъ, что это вещество даетъ два совершенно различныхъ спектра, состоящихъ каждый изъ характерныхъ линій, среди которыхъ есть и такія, которыя не наблюдаются въ спектрахъ другихъ элементовъ *). При меньшей электровозбудительной силѣ индуктирующаго тока разрѣженный аргонъ даетъ красный спектръ, при большей—голубой. Въ послѣднее время *J. M. Eder* и *E. Valenta*, пользуясь очень хорошей вогнутой рѣшеткой, дававшей большую дисперсію, не только вполнѣ подтвердили результаты наблюденій Крукса, но еще открыли третій спектръ аргона, совершенно отличный отъ первыхъ двухъ. Если, именно, воспользоваться очень большой катушкой Румкорфа въ соединеніи съ большими конденсаторами и пропустить сильный токъ по первичной ея обмоткѣ, то аргонъ, находящійся въ капиллярной трубкѣ подъ давленіемъ въ 15—20 mm, начинаетъ свѣтиться блестящимъ *бѣлымъ* цвѣтомъ, когда сквозь него проходитъ токъ отъ вторичной обмотки спирали. При спектроскопическомъ изслѣдованіи этого свѣта оказывается, что многія изъ рѣзкихъ линій краснаго и голубого спектровъ сильно расширились, превратившись въ полосы, и лишь весьма немногія остались рѣзкими; кромѣ того цѣлыя группы линій оказываются *сдвинутыми* по направленію къ красной части спектра (въ среднемъ на 0,5—1,0 единицу Энштрёма), большая же часть линій „бѣлаго" спектра совпадаетъ съ соотвѣтствующими линіями краснаго и голубого спектровъ. Нѣкоторыя изъ линій оказываются расширившимися въ одну лишь сторону, такъ что здѣсь сдвиженіе только кажущееся, другія же несомнѣнно

*) См. *В. Гернетъ*. Аргонъ. Одесса. 1895, стр. 17.

сдвинуты. Вопросъ о томъ, почему эти измѣненія касаются лишь нѣкоторыхъ линій въ спектрѣ аргона, остается совершенно открытымъ.

Большая дисперсія прибора дала возможность авторамъ изучить подробнѣе спектры аргона, наблюдавшіеся Круксомъ. Такъ въ „голубомъ" спектрѣ, за линіей, соотвѣтствующей длинѣ волны въ 2438, т. е. въ ультрафіолетовой части спектра, они наблюдали и точно измѣрили больше 150-и линій. изъ которыхъ крайняя соотвѣтствуетъ длинѣ волны въ 2050,5. Характерно, что эта область спектра азота чрезвычайно неинтенсивна.—(Naturwiss. Rundsch.).

В. Г.

Прозрачность галоидовъ по отношенію къ лучамъ Рёнтгена.— Такъ какъ галоиды, особенно хлоръ, встрѣчаются во многихъ растительныхъ и животныхъ тканяхъ, то интересно было установить, насколько ихъ присутствіе вліяетъ на прозрачность тканей по отношенію къ *x*-лучамъ. Опыты, произведенные *E. Sehrwald*'омъ обнаружили, что чистые хлоръ, бромъ и іодъ въ высокой степени непрозрачны для лучей Рёнтгена, а ихъ соединенія тѣмъ менѣе прозрачны, чѣмъ больше они содержатъ галоида по вѣсу. Жидкій, совершенно безцвѣтный бромоформъ ($CHBr_3$), жидкій хлористый углеродъ (CCl_4) дали густыя черныя тѣни на снимкахъ.—Изъ остальныхъ металлоидовъ оказались мало прозрачными фосфоръ, сѣра, мышьякъ, сурьма и боръ,—особенно послѣдній. Г. Sehrwald полагаетъ, что слабыя тѣни, которыя получаются на рёнтгеновскихъ снимкахъ отъ мягкихъ частей животнаго организма, обязаны своимъ происхожденіемъ желѣзу крови, натрію и хлору поваренной соли, которая содержится въ этихъ тканяхъ.—(Naturwiss Rundsch.).

В. Г.

Электромагнитное растеніе.— У растенія *Phytolacca electrica*, растущаго въ Никарагвѣ (Центральная Америка), замѣчаются очень сильныя электромагнитныя явленія. Если оборвать вѣтку рукою, то чувствуется сильное сотрясеніе, какъ будто отъ спирали Румкорфа. На магнитную стрѣлку вліяніе этого растенія замѣтно уже въ 7—8 шагахъ отъ него. Чѣмъ ближе находится стрѣлка къ растенію, тѣмъ сильнѣе вліяніе этого послѣдняго на нее и, наконецъ, въ серединѣ куста стрѣлка приходитъ во вращательное движеніе. Почва, на которой находится это растеніе, не содержитъ никакихъ признаковъ желѣза или другихъ парамагнитныхъ металловъ, такъ что нѣтъ сомнѣнія, что это особенное свойство принадлежитъ самому растенію. Электромагнитное дѣйствіе этого растенія сильнѣе всего около 2 часовъ дня, ночью же растеніе теряетъ описанныя свойства. Передъ грозой дѣйствіе его еще сильнѣе. —(Электрич.).

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Измѣненія поверхностнаго натяженія жидкостей легко могутъ быть демонстрируемы при помощи слѣдующаго простого приспо-

собленія, предложеннаго *Ph. Lami*. Въ открытую съ обѣихъ концовъ калибрированную стеклянную трубку, установленную горизонтально, вводятъ небольшой столбикъ воды или ртути, помѣщая его на разстояніи 1—2 cm отъ конца трубки. Если затѣмъ нагрѣть слегка спиртовой лампой трубку вблизи отъ мениска жидкаго столбика, то водяной столбикъ *удаляется* отъ нагрѣтаго мѣста, а ртутный *приближается* къ нему. Такъ же дѣйствуетъ на воду и кусочекъ пропускной бумаги, смоченной эфиромъ, а если возлѣ мениска положить кусочекъ легко растворимой соли, напр. хлористаго кальція, то индексъ движется въ противоположную сторону.—Описанный способъ удобенъ еще и тѣмъ, что при помощи фонаря трубку съ индексомъ легко проэктировать на экранъ. — (Il nuovo Cimento).

В. Г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Особая форма явленія св. Эльма наблюдалась 12/24 августа 1895 года, въ $9^1/_2$ час. вечера въ Гаштейнѣ, G. Pröll'емъ, наблюдателемъ тамошней метеорологической станціи. Оконечность дымовой трубы, флюгеръ, крестъ протестантской церкви казались ярко освѣщенными Всѣ деревья (лиственицы) свѣтились сверху до низу, какъ ледяныя пирамиды или какъ будто они были осыпаны сахаромъ. Свѣтъ, который испускали эти предметы, былъ совершенно бѣлъ и не состоялъ, какъ обыкновенно, изъ отдѣльныхъ огоньковъ, но былъ совершенно сплошнымъ, подобнымъ фосфорическому блеску. На садовой дорожкѣ, лежавшей выше, образовалась на землѣ зеленовато-желтая свѣтящаяся полоса, которая исчезала послѣ утрамбовыванія земли, но затѣмъ снова появлялась. Явленіе не сопровождалось шумомъ и не было слышно никакого особаго запаха. Напряженіе свѣта увеличивалось до 10-ти час., а затѣмъ начался сильный ливень. — (Meteorol. Ztschr.).

Какъ сообщаетъ журналъ „Электричество", 6-го іюля въ Кіевѣ, въ электротехнической мастерской Савицкаго и Страуса происходила демонстрація интереснаго изобрѣтенія г. Баляснаго изъ Полтавы; изобрѣтеніе это обѣщаетъ дать значительную экономію въ уличномъ электрическомъ освѣщеніи, сравнявъ стоимость его со стоимостью керосиноваго. До сихъ поръ, какъ извѣстно, вольтову дугу можно было получить, затрачивая 3 ампера при 30—40 вольтахъ напряженія на зажимахъ, употребляя же уголь г. Баляснаго (составъ этого угля составляетъ секретъ изобрѣтателя), можно достигнуть тѣхъ же результатовъ, располагая всего 1/2 ампера при 60—70 вольтахъ. Это даетъ возможность замѣнить калильныя лампочки — дуговыми фонарями, которые гораздо экономичнѣе, такъ какъ даютъ 1 свѣчу на $1-1^1/_4$ уатта, тогда какъ лампочки накаливанія — 1 свѣчу на 3 уатта.

Французскій инженеръ *Изартье* составилъ проэктъ электрической подъемной машины на Монбланъ, и разсчитываетъ приступить къ ея постройкѣ, какъ только будетъ собранъ необходимый капиталъ. На высотѣ 2200 метровъ надъ уровнемъ моря будетъ проложенъ тунель въ горѣ до пункта, находящагося непосредственно подъ вершиной Монблана; отсюда вверхъ пойдетъ шахта высотой въ 2539 метровъ. Длина тунеля составитъ 5700 метровъ.

ЗАДАЧИ.

№ 361. Пересѣчь данную треугольную призму плоскостью, такъ чтобы въ сѣченіи получился равносторонній треугольникъ.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 362. Пересѣчь данный параллелепипедъ $ABCDabcd$ плоскостью, пересѣкающею ребра Aa, Bb, Cc, Dd, такъ чтобы въ сѣченіи получился квадратъ.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 363. Показать, что если въ треугольникѣ

$$b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2),$$

то уголъ Брокара ω служитъ дополнительнымъ угла A.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

№ 364. Тремя точками вписаннаго и каждаго изъ внѣвписанныхъ круговъ треугольника ABC опредѣляются четыре треугольника. Показать, что если S есть площадь вписаннаго треугольника, а S_1, S_2, S_3— площади внѣвписанныхъ треугольниковъ, Δ — площадь треугольника ABC и R—радіусъ описаннаго около него круга, то

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}$$

и

$$16R^4 . SS_1S_2S_3 = \Delta^6.$$

М. Зиминъ (Елецъ).

№ 365. Показать, что если r есть радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, а p—полупериметръ того же треугольника, то

$$p^2 > 27r^2.$$

Я. Полушкинъ (Знаменка).

№ 366. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$z = \frac{2xy + 1}{x^m + 1},$$

гдѣ m есть число цѣлое и положительное.

Е. Буницкій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 203 (3 сер.). Рядъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ $1,3,5,7,\ldots. 2k+1,\ldots.$ разлагаютъ на группы:

$$1;\ 3,5;\ 7,9,11;\ldots.,$$

содержащія послѣдовательно $1,2,3,\ldots. n$ членовъ даннаго ряда. Доказать, что суммы членовъ этихъ группъ суть кубы чиселъ ряда $1,2,3,\ldots n$.

Такъ какъ 1-му члену n-ой группы предшествуютъ

$$\frac{n^2-n}{2}$$

членовъ даннаго ряда, то онъ есть $\left(\frac{n^2-n+2}{2}\right)$-й членъ этого ряда и равенъ

$$n^2-n+1;$$

послѣднiй же членъ n-ой группы равенъ

$$n^2+n-1,$$

а потому сумма членовъ n-ой группы равна

$$\frac{(n^2-n+1+n^2+n-1).n}{2}=n^3.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *А. Бачинскiй* (с. Любень); *Э. Заторскiй* (Вильно); *ученики Кiево-Печерской гимназiи Л. и Р.*

№ 204 (3 сер.). Сторона AB равносторонняго треугольника ABC раздѣлена точкой D въ отношенiи $m:n$. Изъ точки D опущены перпендикуляры DE на сторону BC и DF на сторону AC. Опредѣлить 1) отношенiя $BE:EC$ и $AF:FC$ и 2) отношенiе площади треугольника ABC къ площади круга, описаннаго около четыреугольника $DECF$.

Пусть $AB=a$; тогда

$$AD=\frac{am}{m+n} \text{ и } DB=\frac{an}{m+n}.$$

Замѣтивъ, что $BE=1/_2\ DB$ и $AF=1/_2\ AD$, легко найдемъ

$$\frac{BE}{EC}=\frac{n}{2m+n} \text{ и } \frac{AF}{FC}=\frac{m}{2n+m}.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника DCP, гдѣ P есть основанiе перпендикуляра, опущеннаго изъ O на AB, опредѣлимъ

$$\overline{CD}^2=\frac{a^2(m^2+n^2+mn)}{(m+n)^2},$$

а такъ какъ CD служитъ дiаметромъ круга, описаннаго около четыреугольника $DECF$, то искомое отношенiе площадей равно

$$\frac{\sqrt{3}(m+n)^2}{\pi(n^2+m^2+mn)}.$$

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *Э. Заторскiй* (Спб.); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Б. К.*, *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *ученики Кiево-Печерской гимназiи Л. и Р.*

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

1896.—№ 7.

Lé monde géant de Jupiter. *C. Flammarion.*—Юпитеръ находился въ оппозиціи 24 минувшаго января и потому зимніе мѣсяцы были особенно удобны для наблюденій. Совокупность наблюденій Антоніади, Iosé Comas Sola, Hough'a, Léo Brenner'a и др., результаты которыхъ подробно изложены въ статьѣ и сопровождаются рисунками, указываетъ на непрерывную дѣятельность на поверхности планеты. Если сопоставить періодъ вращенія экваторіальной зоны — 9 ч. 50 м. съ періодомъ зонъ около 15° с. ш. и 30° ю. ш. — 9 ч. 55 м., то получимъ, что вещество, покрывающее экваторіальную зону, движется относительно сосѣднихъ зонъ со скоростью 400 кил. въ часъ, Объ измѣненіи широтъ темныхъ полосъ Юпитера и собственномъ движеніи двухъ темныхъ пятенъ сообщалось раньше *). Чуть-ли не наибольшій интересъ представляетъ загадочное большое красное элиптической формы пятно въ южномъ полушаріи Юпитера; продолжительность его вращенія изъ года въ годъ увеличивается: рввная 9 ч. 55 м. 35,1 сек. въ 1879—80 г., она въ 1891—2 г. равнялась 9 ч. 55 м. 41 сек. и теперь равна 9 ч. 55 м. 41, 5 с. Внѣшній видъ его тоже измѣняется: очень яркое, видимое въ самую слабую трубу въ 1880 г., оно постепенно ослабѣвало и въ 1885 г. совсѣмъ перестало быть видимымъ; потомъ оно становилось отчетливѣе и въ 1887—90 гг. его можно было различить въ трубу съ отверстіемъ въ 0,075 метра; потомъ оно то блѣднѣло, то краснѣло и въ 1895--6 г. было очень слабо видимо. Stanley Williams находитъ, что это пятно напоминаетъ островъ въ рѣкѣ: если предположить, что окружающая его свѣтлая зона движется къ западу, сталкиваясь съ пятномъ раздвояется и въ видѣ двухъ рукавовъ его огибаетъ, то становится понятнымъ и накопленіе бѣлой матеріи вокругъ пятна--ореолъ пятна и бѣлый водоворотъ, видимый къ востоку отъ него.

Société Astr. de France. *Séance du 3 Juin.*

La vapeur d'eau dans l'univers. *M. Janssen.*—Спектральный анализъ обнаружилъ присутствіе водяныхъ паровъ въ атмосферахъ Марса, Сатурна, съ большой вѣроятностью на Венерѣ, Юпитерѣ и на нѣкоторыхъ звѣздахъ. «На солнцѣ мы можемъ найти доказательство тому, что наши океаны, имѣющіе, какъ извѣстно, соленую воду, солеными и образовались, а не заимствовали соль изъ горныхъ породъ. Въ самомъ дѣлѣ, если разсмотримъ составъ и порядокъ распредѣленія металловъ надъ фотосферой и въ хромосферѣ, то увидимъ, что натрій преобладаетъ, наиболѣе распространенъ; за нимъ слѣдуютъ магній и кальцій; если-бы вслѣдствіе внезапнаго охлажденія водородъ соединился съ кислородомъ, вышедшимъ изъ солнечнаго ядра, и образовалъ океанъ, то этотъ океанъ немедленно растворилъ-бы хлористые натрій, магній и кальцій и имѣлъ-бы точно такой-же составъ, какъ и земныя моря".

La photographie de la couronne solaire. *A de la Baume Pluvinel.*—Авторъ задается цѣлью извлечь изъ фотографированія предыдущихъ затменій опытныя указанія относительно наилучшаго способа фотографированія затменія 9 августа 1896 г.

Если назовемъ e -- степень освѣщенія какого-либо мѣста свѣточувствительной пластинки, J — его продолжительность и произведеніе $et = A$ — количествомъ радіацій, то можно *предположить*, что фотографическое дѣйствіе пропорціонально (или равно) $A = et$. Но $e = J. 100 \frac{a^2}{f^2}$, гдѣ a — діаметръ объектива, f — фокусное разстояніе, J—собственный блескъ короны; поэтому

*) См. № 230 „В. О. Ф.".

$$A = J \cdot 100 \frac{a^2}{f^2} t = J\alpha,$$

гдѣ

$$\alpha = 100 \frac{a^2}{f^2} t.$$

При очень маломъ α мы получимъ хорошее изображенiе самыхъ яркихъ частей короны; если α больше, то лучше всего выйдутъ среднiя, менѣе яркiя, части короны; если α превосходитъ нѣкоторый предѣлъ, то изображенiе самыхъ слабыхъ частей короны можетъ слиться съ фономъ неба, не лишеннаго также нѣкотораго освѣщенiя. Является такимъ образомъ задача: если двѣ свѣтящiяся поверхности очень мало разнятся по степени блеска, то при какихъ условiяхъ, фотографируя, мы получимъ maximum контраста? Для отвѣта на этотъ вопросъ авторъ при фотографированiи затменiя 1893 г. воспользовался большой камерой, раздѣленной на девять отдѣленiй; дiаметры объективовъ этихъ отдѣленiй измѣнялись отъ 5mm до 155mm, общее фокусное разстоянiе = 1,52m, продолжительность позы, равная продолжительности затменiя, равнялась 3 м. 50 с; α измѣнялось отъ 0,24 до 250. Наилучшее изображенiе получилось при $\alpha = 3{,}24$. Taylor фотографировалъ тоже затменiе въ Бразилiи и наилучшiе результаты получилъ при $\alpha = 8{,}8$. Такимъ образомъ безполезно было для *этого* затменiя увеличивать α выше указанныхъ предѣловъ, при болѣе яркомъ небѣ α слѣдуетъ уменьшить и при болѣе темномъ—при большей продолжительности затменiя—его слѣдуетъ увеличить.

Опытъ показываетъ, что предположенiе $A = et$ справедливо только пока e и t не выйдутъ за извѣстные предѣлы; внѣ этихъ предѣловъ фотографическое дѣйствiе будетъ функцiей не только произведенiя, но и множителей въ отдѣльности. Опытъ фотографовъ учитъ насъ, что при большомъ t и очень маломъ e можно получить изображенiе съ большими контрастами; это обстоятельство безполезно при фотографированiи затменiя, такъ какъ t нельзя сдѣлать больше продолжительности затменiя, но этимъ способомъ вѣроятно можно получить изображенiе короны внѣ затменiя.

Nouvelles de la Science. Variétés.
Le ciel en juillet.

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 332, 337, 339, 340, 347, 349, 350, 353 (3 сер.); 182 (2 сер.); 106 (1 сер.); *А. Игнатова* (Тула) 340 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Москва) 73, 74, 75, 303, 313, 320, 321, 323, 325, 327, 336 (3 сер.); *Лежебока* (Ярославль) 303, 310, 315, 316, 319, 322, 323, 327, 329, 336 (3 сер.); *А. Казарова* (Спб.) 312 (3 сер.).

ЗАПОЗДАВШIЯ РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ были получены отъ: *Е. Плютинской* (с. Любень) 82 (3 сер.); *К. Зновицкаго* (Кiевъ) 165, 167, 168 (3 сер.); *А. Павлычева* (Иваново-Вознесенскъ) 151, 165, 166, 168, 171, (3 сер.); *А. Варенцова* (Шуя) 128, 130, 135, 140, 165, 166, 167, 168, 171 (3 сер.); *учениковъ Кiево-Печерской гимназiи Л и Р.* 191 (3 сер.); *В. Поздюнина* (Самара) 219 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 182, 220 (2 сер.).

ОТВѢТЫ РЕДАКЦIИ.

А. К—ву (Спб.). — Будетъ помѣщена.

Ѳ. Ѳ. М—ву (Спб.) – Третье изъ вашихъ уравненiй удовлетворяется при $y = \infty$ при всякихъ значенiяхъ z, въ чемъ можете убѣдиться непосредственно, не возводя уравненiя въ безконечную степень.

Я. Полушкину (с. Знаменка). – Для доказательства, что при $AO = 2HD$ стороны треугольника равны, нѣтъ надобности прибѣгать къ теоремѣ Стьюарта, ибо тогда очевидно $r = HD$ и $R = 2r$.



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскiй.

Дозволено цензурою. Одесса, 23-го Октября 1896 г.
„Центральная типо-литографiя", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.